

УДК 517.927

Об одной априорной мажоранте собственных значений задач Штурма–Лиувилля

А. А. Владимиров

Аннотация: Изучается вопрос о точной априорной мажоранте M_γ наименьшего собственного значения задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} -y'' + qy &= \lambda y, \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

с ограничениями на потенциал вида $q \leq 0$ и $\int_0^1 |q|^\gamma dx = 1$, где $\gamma \in (0, 1/2)$. Показывается, что эта мажоранта подчиняется строгой оценке $M_\gamma < \pi^2$.

1. Рассмотрим граничную задачу

$$\begin{aligned} -y'' + qy &= \lambda y, \\ y(0) &= y(1) = 0, \end{aligned}$$

где потенциал выбирается внутри семейства

$$A_\gamma = \left\{ q \in C[0, 1] : q \leq 0, \quad \int_0^1 |q|^\gamma dx = 1 \right\}.$$

Свяжем с указанной задачей априорную мажоранту $M_\gamma \Leftarrow \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_0(q)$ наименьшего собственного значения. Как было установлено в [1: Теорема 1.2], при $\gamma \geq 1/2$ выполняется равенство $M_\gamma = \pi^2$, а при $\gamma < 1/3$ справедлива строгая оценка $M_\gamma < \pi^2$. Данный результат повторён также в ряде позднейших публикаций того же автора (см., например, [2: Теорема 2.1]). Целью настоящей заметки является установление справедливости строгой оценки $M_\gamma < \pi^2$ также в случае $\gamma \in [1/3, 1/2)$.

2. Далее мы всегда предполагаем величину $\gamma \in (0, 1/2)$ каким-либо образом зафиксированной. Пусть $q \in C[0, 1]$ — неположительный потенциал, удовлетворяющий соотношению $\lambda_0(q) > (\pi - \varepsilon)^2$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое достаточно малое число. Рассмотрим связанные с соответствующей собственной функцией $y \in C^2[0, 1]$ функции $\varrho, \vartheta \in C^1[0, 1]$ и $\sigma \in C[0, 1]$ вида

$$\varrho \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} y \\ y' / \sqrt{\lambda_0(q)} \end{pmatrix}, \quad \sigma \Leftarrow |q| \sin^2 \vartheta.$$

Функция ϑ подчиняется уравнению

$$\vartheta' = \frac{1}{\varrho} \cdot (\cos \vartheta \quad -\sin \vartheta) \cdot \begin{pmatrix} y' \\ y'' / \sqrt{\lambda_0(q)} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0(q) + \sigma}{\sqrt{\lambda_0(q)}}$$

и пробегает, строго возрастаю, отрезок $[0, \pi]$. Соотношения

$$\int_0^1 \frac{\sigma \vartheta'}{\lambda_0(q) + \sigma} dx = \int_0^1 \left[\vartheta' - \sqrt{\lambda_0(q)} \right] dx = \pi - \sqrt{\lambda_0(q)} < \varepsilon$$

означают, что множество

$$E_\varepsilon \Rightarrow \left\{ x \in [0, 1] : \sigma(x) > \varepsilon^{(1-2\gamma)/(1-\gamma)} \right\}$$

подчиняется оценке

$$\int_{E_\varepsilon} \vartheta' dx < \mu(\varepsilon) \Rightarrow \pi^2 \varepsilon^{\gamma/(1-\gamma)} + \varepsilon.$$

Далее мы всегда будем предполагать выполненным неравенство $\mu(\varepsilon) < \pi$. В этом случае справедливы оценки

$$\begin{aligned} \int_{E_\varepsilon} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx &\leq 2 \int_0^{\mu(\varepsilon)/2} \sin^{-2\gamma} x dx < \frac{2\pi^2}{1-2\gamma} \varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)}, \\ \int_{\overline{E_\varepsilon}} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx &\leq \int_0^\pi \sin^{-2\gamma} x dx < \frac{4}{1-2\gamma}. \end{aligned}$$

С учётом заведомо выполняющихся, ввиду $\lambda_0(q) > 4$, неравенств

$$2\sqrt{\lambda_0(q)}\sigma^\gamma(x) \leq \lambda_0(q) + \sigma(x)$$

это означает справедливость соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^1 |q|^\gamma dx &= \sqrt{\lambda_0(q)} \cdot \int_0^1 \frac{\sigma^\gamma \sin^{-2\gamma} \vartheta}{\lambda_0(q) + \sigma} \cdot \vartheta' dx \\ &= \sqrt{\lambda_0(q)} \cdot \left[\int_{E_\varepsilon} \frac{\sigma^\gamma \sin^{-2\gamma} \vartheta}{\lambda_0(q) + \sigma} \cdot \vartheta' dx + \int_{\overline{E_\varepsilon}} \frac{\sigma^\gamma \sin^{-2\gamma} \vartheta}{\lambda_0(q) + \sigma} \cdot \vartheta' dx \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \int_{E_\varepsilon} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx + \frac{\varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)}}{\sqrt{\lambda_0(q)}} \cdot \int_{\overline{E_\varepsilon}} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx \\ &\leq \frac{\pi^2 + 2}{1-2\gamma} \cdot \varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)}. \end{aligned}$$

Тем самым, справедливость соотношения $q \in A_\gamma$ несовместима с предположением о значительной малости параметра $\varepsilon > 0$. Это и означает выполнение искомой оценки $M_\gamma < \pi^2$.

Литература

[1] С. С. Ежак. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле / В кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 517–559.

[2] С. С. Ежак. Об одной задаче минимизации функционала, порождённого задачей Штурма–Лиувилля с интегральным условием на потенциал // Вестник СамГУ. — 2015. — № 6 (128). — С. 57–61.